

Knowledge Discovery in Databases  
WS 2005/06  
Übungsblatt 8

Abgabe aller mit Hausaufgabe markierten Aufgaben bis Donnerstag, 12.01.2006, 8:30 Uhr, vor der Vorlesung  
beim Dozenten oder im Übungsbriefkasten

**Aufgabe 8-1**      Kernel-Funktionen  
**Hausaufgabe**

Wie in der Vorlesung erklärt, zeichnet sich eine Kernel-Funktion ("Kernel") durch positive (Semi-)Definitheit aus. Eine Matrix  $A$  ist positiv definit, falls ihre Eigenwerte nichtnegativ sind, oder alternativ formuliert, falls für all  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt:  $x^\top * A * x \geq 0$

Zeigen Sie, dass folgende Funktionen Kernels sind, falls  $x$  und  $x'$  Vektoren im  $\mathbb{R}^d$  sind:

- (a)  $k(x, x') = 1$
- (b)  $k(x, x') = 3 * x^\top x'$
- (c)  $k(x, x') = 3 * x^\top x' + 5$

**Aufgabe 8-2**      Support Vector Machines

In der Vorlesung wurden Support Vector Machines zur Klassifikation eingeführt. In dieser Aufgabe soll zur Erläuterung des vorgestellten Verfahrens der minimale Fall besprochen werden, in dem für jede Klasse nur ein Vektor gegeben ist. Dies impliziert zwangsläufig, dass die Klassen aufgrund der Trainingsmenge linear separierbar sind, d.h. wir können mit einem Hard Margin im Eingaberaum arbeiten. Als Trainingsmenge sollen uns die beiden Vektoren  $(1, 1)$  für Klasse A ( $y = -1$ ) und  $(2, 2)$  für Klasse B ( $y = 1$ ) dienen. Das verwendete Skalarprodukt sei das kanonische Skalarprodukt (vgl. Bsp in der Vorlesung).

- (a) Formulieren Sie das Problem zunächst als duales Optimierungsproblem mit Lagrange Multiplikatoren. Bestimmen Sie jetzt durch analytische Lösung die Werte der Lagrange Multiplikatoren.
- (b) Zur Berechnung der Maximum Margin Hyperplane bestimmen wir jetzt den Normalenvektor  $\vec{w}$ . Das Inverse des Betrags dieses Vektors  $\vec{w}$  stellt dabei die Breite des Randes (Margin) dar. Benutzen Sie zur Bestimmung folgende Formel:

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot y_i \cdot \vec{x}_i$$

- (c) Nachdem Sie den Normalenvektor  $\vec{w}$  bestimmt haben, können wir jetzt daraus noch den Skalar  $b$  berechnen, um die Lage der Hyperebene  $H(\vec{w}, b)$  nun endgültig festzulegen. Die Formel zur Berechnung ist:

$$b = - \frac{\max_{i, y_i=-1} \langle \vec{w}, \vec{x}_i \rangle + \min_{i, y_i=1} \langle \vec{w}, \vec{x}_i \rangle}{2}$$

- (d) Nachdem Sie die trennende Hyperebene jetzt festgelegt haben, bestimmen Sie jetzt die Klasse der beiden Vektoren:  $(3, 5)$  und  $(0, 1)$ . Benutzen Sie dazu entweder die Entscheidungsregel des primären OPs oder die des dualen OPs.